PD Emanuel Scheidegger
B. Sc. Thomas Spittler
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Funktionentheorie II
WS 17/18

Übungsblatt 9

Ableitungen von Modulformen

33. Identitäten zwischen Eisensteinreihen
Beweisen Sie die folgende Identitäten durch Manipulation von Potenzreihen und unendlichen Produkten in $q = e^{2\pi i\tau}$.
    (a) (1 Punkt) $E_2\left(\tau + \frac{1}{2}\right) - E_2(\tau) = 48\sum_{n>0,\, n \text{ ungerade}} \sigma_1(n)q^n$
    (b) (1 Punkt) $E_k(\tau) - (1 + p^{k-1})E_k(p\tau) + p^{k-1}E_k(p^2\tau) = -\frac{2k}{B_k}\sum_{p\nmid n} \sigma_{k-1}(n)q^n$, $k \geq 2$, p eine Primzahl
    (c) (1 Punkt) $E_2(\tau) - 3E_2(2\tau) + 2E_2(4\tau) = \frac{1}{2}(E_2(\tau) - E_2\left(\tau + \frac{1}{2}\right))$
    (d) (1 Punkt) $\eta\left(\tau + \frac{1}{2}\right) = e^{\frac{2\pi i}{48}}\frac{\eta^3(2\tau)}{\eta(\tau)\eta(4\tau)}$.

34. Vektorfelder auf dem Ring der Quasimodulformen
Es seien

$$\begin{aligned} R_1 &= 12\frac{\partial}{\partial E_2} \\ R_0 &= 2E_2\frac{\partial}{\partial E_2} + 4E_4\frac{\partial}{\partial E_4} + 6E_6\frac{\partial}{\partial E_6} \\ R_{-1} &= \frac{1}{12}(E_2^2 - E_4)\frac{\partial}{\partial E_2} + \frac{1}{3}(E_2E_4 - E_6)\frac{\partial}{\partial E_4} + \frac{1}{2}(E_2E_6 - E_4^2)\frac{\partial}{\partial E_6} \end{aligned}$$

Vektorfelder auf $\widetilde{M}_*(\Gamma_1) \cong \mathbb{C}[E_2, E_4, E_6]$.
    (a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die R_i eine Lie–Algebra bilden, die isomorph zu $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ ist.
    (b) (1 Punkt) Es seien $D : \widetilde{M}_k^{(\leq p)}(\Gamma_1) \to M_{k+2}^{(\leq p+1)}(\Gamma_1), f \mapsto Df$, $\delta : \widetilde{M}_k^{(\leq p)}(\Gamma_1) \to M_{k-2}^{(\leq p-1)}(\Gamma_1), f = f_0 \mapsto \frac{1}{2\pi i}f_1$, und $W : \widetilde{M}_k^{(\leq p)}(\Gamma_1) \to M_k^{(\leq p)}(\Gamma_1), f \mapsto kf$. Zeigen Sie, dass D, δ, W Derivationen auf $\widetilde{M}_*(\Gamma_1)$ sind.
    (c) (1 Punkt) Es sei $f \in \widetilde{M}_*(\Gamma_1)$. Zeigen Sie, dass gilt: $\delta f = R_1 f$, $Wf = R_0 f$ und $Df = R_{-1}f$.

35. Die Identität von Bol.

Es sei $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ und $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine differenzierbare Funktion.

(a) (1 Punkt) Beweisen Sie die Identität von Bol: $D^{k+1}(f|_{-k}\gamma) = \left(D^{k+1}f\right)|_{k+2}\gamma$. Hinweis: Induktion nach der Ordnung der Ableitung.

(b) (1 Punkt) Es sei nun $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Beweisen Sie die Identität aus Aufgabe (a) mit Hilfe der verallgemeinerten Integralformel von Cauchy.

(c) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $D^{k-1} : M^!_{2-k}(\Gamma_1) \to M^!_k(\Gamma_1)$ eine lineare Abbiildung ist. Was gilt für den konstanten Term in der Fourier–Reihenentwicklung des Bildes von D^{k-1} ?

(d) (1 Punkt) Beweisen Sie die folgenden Identitäten:

$$Dj = -\frac{E_{14}}{\Delta}, \quad (Dj)^2 = E_4\, j\,(j - 1728).$$

36. Eine erzeugende Funktion für schwach holomorphe Modulformen

Es seien $k = 12\ell + k'$ und $f_{k,m} \in M^!_k(\Gamma_1)$ wie in Aufgabe 28. Zeigen Sie, dass gilt:

(a) (2 Punkte)

$$f_{k,m}(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\Delta^\ell(z) E_{k'}(z) E_{14-k'}(\tau)}{\Delta^{\ell+1}(\tau)(j(\tau) - j(z))} q^{-m-1} \mathrm{d}q,$$

wobei C ein Kreis um 0 in der q–Ebene mit genügend kleinem Radius ist. Wenden Sie dazu die verallgemeinerte Integralformel von Cauchy auf $F_{k,D}(j)$ aus Aufgabe 28(d) an und verwenden Sie Aufgabe 35(d) um die Variable zu transformieren.

(b) (2 Punkte)

$$\sum_{m \geq -\ell} f_{k,m}(z) q^m = \frac{f_k(z) f_{2-k}(\tau)}{j(\tau) - j(z)}.$$

wobei $f_k = \Delta^\ell E_{k'}$.

Abgabetermin: Dienstag, 9. 1. 2018 um 10:00 Uhr.